Revista Unimar
Número 58
Diciembre 2011, 98-104
ISSN 0120-4327
ISSN -E 2216-0116

# PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SENTENCIAS E IGUALDADES NUMÉRICAS ADITIVAS*

# VARIATIONAL THINKING EQUALITIES AND ADDITIVE NUMERICAL EXPRESSIONS

**Javier Caicedo Zambrano****
Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia

**Leonora Díaz Moreno,** PhD**
Docente Investigadora y Coordinadora Académica Doctorado en Educación Matemática,
Universidad de Los Lagos, Campus Santiago, Chile

Fecha de recepción:
20 de octubre de 2011
Fecha de aprobación:
20 de enero de 2012

**Palabras claves:**
Pensamiento variacional, resolución de problemas, igualdades y sentencias numéricas aditivas.

**RESUMEN**

Se presenta una revisión del concepto de Pensamiento Variacional (PV), una definición del mismo y se propone una estrategia para trabajar la variación y el cambio, en el marco de las estructuras numéricas aditivas, de modo que desde los primeros grados de la Educación Básica Primaria, a través del planteamiento y resolución de problemas, se promuevan acciones de pensamiento que contribuyan al uso y al desarrollo del PV.

***Key words:***
*Variational thinking, problem solving, equalities and additive numerical statements.*

**ABSTRACT**

*Presents a review and a definition of the concept of Variational Thought (VT) and proposes a strategy to work variation and change, within the framework of additive numeric structures, so that from the early grades of Primary Education through planned approach and problem solving, thinking actions contributing to the use and development of VT are promoted.*

* Artículo de Revisión de Tema.
**Doctorando en Ciencias de la Educación, Rudecolombia-Universidad del Tolima, Ibagué, Tolima, Colombia. Correo electrónico: jacaza1@gmail.com
*** Coordinadora académica Doctorado en Educación Matemática, Universidad de Los lagos, Campus Santiago, Chile.
Correo electrónico: leonora.diaz@ulagos.cl.

Se presenta una revisión del concepto de PV (Pensamiento Variacional), de la variación y el cambio, y un referente conceptual para su comprensión. Posteriormente, siguiendo a Vasco (2006), se llama la atención sobre la posible confusión acerca *de lo que es y lo que no es* PV, pues, como bien lo señala, no se trata de saber una definición de función ni de aprenderse fórmulas de áreas, volúmenes o de la cinemática, ni tampoco de dibujar gráficas, ni hacer tablas de valores, solamente; sino que, estos hechos adquieren importancia si se analiza la covariación, ya que el objeto del PV es la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo.

Finalmente, se muestra, a través de ejemplos, una estrategia para trabajar la variación y el cambio, en el marco de las estructuras numéricas aditivas, de modo que desde los primeros grados de la Educación Básica Primaria, a través del planeamiento y resolución de problemas y de la definición de PV presentada, se promuevan acciones de pensamiento que contribuyan al uso y al desarrollo del PV. Asimismo, se muestra cómo estas acciones se pueden realizar a través de las actividades cotidianas de enseñanza y de aprendizaje, siempre y cuando sean desarrolladas en forma *dinámica*, donde, antes que la obtención de resultados, prevalezca el desarrollo del pensamiento matemático.

## 1. Acerca del Pensamiento Relacional

Se reconoce que para fomentar un aprendizaje comprensivo de las matemáticas, los docentes de todos los niveles deben promover el pensamiento algebraico (Molina, 2006), lo cual se puede lograr con la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura, sino como una forma de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Kaput, 1995, 1998, citado por Molina, 2006). En este orden de ideas, según De Costa y De Oliveira (2011), el *pensamiento algebraico* se puede entender como "un modo de describir significados atribuidos a los objetos del álgebra, las relaciones entre ellos, el modelado y la resolución de problemas en el contexto de generalización de estos objetos" (p.103). Ahora bien, dependiendo del nivel escolar de los alumnos, las generalizaciones se pueden expresar en palabras o símbolos basados en una descripción de patrones y de relaciones funcionales.

Por su parte, Molina (2006), en su tesis doctoral, después de hacer una revisión bibliográfica sobre los términos pensamiento y relación, desde distintas áreas del conocimiento, asume las siguientes definiciones, las cuales serán un referente central para este documento:

**1.1. Pensamiento.** Actividad intelectual (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende, y dota de significado a lo que le rodea, y consiste, entre otras acciones, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar en torno a ideas o conceptos, a partir de lo cual es posible tomar decisiones y emitir juicios de eficacia, permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta.

**1.2. Relación.** Conexión, correspondencia o situación que se da entre una cosa y otra, o de una cosa consigo misma; en definitiva, entre un par ordenado, ya sea en la realidad o en la mente. Las relaciones son aplicadas a objetos matemáticos concretos; pero, cuando se hace referencia a hechos siempre ciertos respecto a elementos de un conjunto, las relaciones son llamadas propiedades. Según Mason, "el reconocimiento de relaciones tiende a centrarse en lo particular, mientras que la percepción de propiedades supone un movimiento hacia lo general" (citado en Molina, 2006, p. 61).

**1.3. Pensamiento relacional.** Es la actividad intelectual consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo. Por su parte, Mason (2003) expresa que en el examen del objeto o situación y en la búsqueda de relaciones, en distintos momentos de dicho proceso, la atención puede ir variando de la totalidad a ciertas partes o detalles del objeto matemático y viceversa, haciendo énfasis en unos elementos o aspectos e ignorando otros.

Según las anteriores consideraciones, se entiende que una persona piensa relacionalmente, cuando usa *pensamiento relacional*, es decir, cuando no sólo observa o detecta relaciones existentes entre los objetos matemáticos en cuestión, sino cuando éstas pasan a ser consideradas objeto de pensamiento, para lograr un propósito determinado. Dicho propósito puede ser, resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre una situación o sobre los conceptos involucrados. Las relaciones, como lo expresa Molina (2006), son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del sujeto con la intencionalidad de alcanzar un objetivo.

**2. Acerca del cambio y la variación**

Una conceptualización clara sobre esta temática, la presentan Cantoral, Molina, y Sánchez (2005b):

> La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto (o situación); mientras que la variación, (…) (se entiende) como una cuantificación del cambio; es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer (qué,) cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. (… Se dice que) una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. (p. 464)

Reconocer qué, cómo y cuánto cambia un sistema, una situación o un fenómeno, implica ejercer nuestro entendimiento para determinar distintas relaciones allí presentes y, en particular, las relaciones de dependencia, es decir, las relaciones de covaricación.

Si bien el término *situación* en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), se toma en el sentido de *tarea*, con la idea de que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas, de las que es importante conocer sus naturalezas y las dificultades propias, en este documento se utiliza el concepto situación en un sentido amplio, que siguiendo a Cordero et al. (2004, p. 64), se refiere a una clase de objetos, materiales o mentales, a una clase de sucesos o fenómenos, como también a problemas, teoremas o afirmaciones y teorías. En particular, interesa aquí conceptualizar lo que se entiende por **situación de variación**.

Según Acosta (2004), una **situación de variación** es "tanto un escenario en el que los elementos en escena cambian con el transcurso del tiempo" (p. 112), como también, aquellas circunstancias donde la modificación de estado se presenta relacionada con la idea de cambio de una variable independiente cualquiera, esta postura también la comparten Moreno y Aldana (2004).

Cuando en una situación de variación se enfoca el estudio en las variables y sus valores, sin examinar su covariación, se dirá que está trabajando en el cambio; si además, se analiza la variación de las variables en sí mismas y su **covariación**, se dirá que se está trabajando en la **variación**. Por tanto, estudiar la variación en una situación problema de ese tipo, implica examinar la covariación de sus variables, lo que equivale a analizar cómo varían los valores de unas dependiendo de los cambios de otras; pero también, estudiar la variación implica analizar los patrones de variación de las variables en sí mismas.

En el caso en el cual, en una situación de variación, sólo se analiza el cambio, se dice que la situación está siendo tratada en forma estática, pero si se examina su variación, la situación estará siendo tratada en forma dinámica. Por ejemplo, en la construcción de una gráfica cartesiana de una función, ubicar un punto de la gráfica en el plano produce un cambio en la representación de la misma, pero si se analiza cómo se comporta dicho punto cuando se cambian los valores de una variable, se está estudiando su variación.

**3. Acerca del Pensamiento Variacional**

Este pensamiento, como uno de los cinco tipos de pensamiento matemático que consideran los Lineamientos Curriculares (LC), se lo puede describir, de acuerdo con Vasco (2006), como sigue:

> [Es] una manera dinámica de pensar, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal forma que covaríen de manera semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. Tiene pues un momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante, y de los patrones que se repiten en ciertos procesos (…); luego tiene un momento de producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan, con alguna aproximación, las covariaciones detectadas; luego tiene un momento de (…) correr esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro (momento es el) de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar; y finalmente, (está) el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo. (pp. 138-139)

Así que, en una situación de variación, haciendo uso del PV, se trata de captar, entre otras cosas, lo que varía y lo que permanece constante, información que es fundamental si se trata de producir modelos que relacionen diferentes variables implicadas en una situación. En otras palabras, la percepción de cambios en las variables puede revelar diferentes patrones y relaciones de dependencia entre las mismas; es decir, pueden poner en evidencia las relaciones de covariación entre ellas.

Según Acosta[1] (2004), "el pensamiento variacional es la capacidad para dar sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas" (p. 112).

Esta concepción[2] enfatiza que con el uso y desarrollo del PV se promueven capacidades para modelar situaciones de variación haciendo uso de funciones numéricas, las cuales son consideradas el "corazón del pensamiento variacional" (p. 120). En efecto, una vez modeladas las situaciones, es posible describir, interpretar y predecir los cambios a partir de un análisis de la variación en los modelos que se construya. Sin embargo, el pensamiento variacional no se reduce a la modelación de una situación por medio de funciones numéricas, ya que este pensamiento está presente en cualquier situación donde se comunique o utilice estrategias de tipo variacional; es decir, en circunstancias donde se haga uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones, que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se esté estudiando.

Por otra parte, en los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), (1998), se expresa que el PV presupone ubicarse en el dominio de un campo conceptual que "involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas de la actividad práctica del hombre, de las ciencias y las propiamente matemáticas, donde la variación se encuentre como sustrato de ellas" (p. 72). De la misma manera, el MEN (2003) puntualiza que el PV tiene que ver con "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (p. 66).

Como se puede observar, el MEN no define el PV, sino que asume que este pensamiento contribuye a vincular conceptos y procedimientos para la modelación de situaciones de variación y cambio, en cualquier área de las ciencias, donde sean fundamentales las relaciones de covariación.

Es posible que, el hecho de que no exista una definición de PV en los LC, sea una de las razones por las que se lo identifique con el contenido del álgebra, y más precisamente, en términos de fórmulas y de ecuaciones. Al respecto, Vasco (2006, p. 138), llamando la atención sobre la posible confusión sobre lo que no es y lo que es pensamiento variacional, y por ello, sobre la problemática de la formación del PV, señala que no se trata de saber una definición de función, ni aprenderse fórmulas de áreas, volúmenes o de la cinemática; ni tampoco se trata de dibujar gráficas, ni hacer tablas de valores, sino que, estos hechos son importantes si se analiza la covariación; ya que el objeto del pensamiento variacional es el análisis de la covariación entre cantidades de magnitudes, principalmente las variaciones en el tiempo.

Complementando lo que señala Vasco y, teniendo presente que en el estudio de la variación es central el papel que juegan las mediciones, es importante tener en cuenta lo que al respecto de las fórmulas afirma Fey (2001): "el énfasis en las fórmulas deja a los estudiantes mal preparados para abordar de manera inteligente el carácter aproximado de las mediciones reales" (p. 98). Lo que sugieren Vasco y Fey, es que en el estudio de las situaciones de variación, se trascienda del trabajo sobre el cambio, que es estático, al análisis de la variación, que es dinámico y que requiere, entre otras cosas, del reconocimiento de relaciones de covariación.

Desde la concepción de Cantoral et al. (2005), el pensamiento y lenguaje variacional, como parte del pensamiento matemático, "trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio, por

[1]Dado que en el contexto de este documento, se ha concebido a las situaciones de cambio como un caso particular de las situaciones de variación, y que en aquellas se presta atención a los valores y las variables, y no se considera las relaciones de covariación, entonces, la concepción de Acosta se entenderá en el contexto de situaciones de variación y no sólo en el de las situaciones de cambio.

[2]Para los propósitos de este trabajo se entenderá por concepciones, el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto. Son las organizadoras implícitas de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva. Describen la naturaleza de los objetos matemáticos y las diferentes imágenes de éstos en la mente, ya sean simbólicos, gráficos, etcétera.

un lado, y de los procesos complejos del pensamiento por otro" (p. 185). Esto implica la integración de los dominios numéricos, los conceptos de variable, función, derivada e integral. Estos autores, además señalan que, entre los rasgos característicos del comportamiento variacional de una función están el crecimiento, el decrecimiento, los puntos críticos, las regiones donde la función o la función derivada son positivas, negativas o nulas. A pesar de que en esta concepción no se define el pensamiento y lenguaje variacional, sí muestra dónde se aplica; sin embargo, produce la idea de que el pensamiento variacional solamente está relacionado con temas del cálculo y no con una forma dinámica de estudiarlo; es decir, no destaca que lo central para el uso y desarrollo del PV es el estudio de la covariación en diferentes situaciones de variación.

La definición de PV que se propone en este documento, destaca algunos rasgos que se pueden observar respecto a su puesta en evidencia y proporciona ideas sobre cómo promoverlo:

> El PV, como un tipo de pensamiento matemático, es un pensamiento relacional que está dirigido al análisis de la covariación de un sistema, de una situación o de un fenómeno en general. Es un pensamiento orientado a reconocer qué, cómo y cuánto varían tal sistema, situación o fenómeno, con el fin de lograr su comprensión, descripción, representación y/o modelación en distintos sistemas o registros simbólicos, sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos y/o algebraicos. Se pone en evidencia al reconocer y conceptualizar formas, al comunicar argumentos y utilizar estrategias que involucren el uso de recursos, maniobras, ideas, técnicas y/o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo y cualitativo de la variación y el cambio en el sistema u objeto que se esté estudiando.

Las preguntas: ¿Qué? ¿Cómo? y ¿Cuánto?, se convierten en un recurso didáctico para el análisis dinámico de un sistema, situación o fenómeno y caracterizan su estatus variacional, ya que son propias para un análisis covariacional y, además, pueden posibilitar la comprensión, descripción, modelización y representación en distintos sistemas simbólicos y, en general, en cualquier tipo de situación dinámica.

Así pues, el PV se aplica en el análisis **dinámico**[3] de un sistema, situación o fenómeno cuando se trata de reconocer relaciones de covariación entre magnitudes, cantidades y variables, a través de procesos generales como describir, clasificar, justificar, representar, modelar, entre otros, en la perspectiva de resolver un problema, o en general, de tomar decisiones.

**4. Resolución de Problemas**

Tratando este tema, Callejo (1998), hace referencia al concepto de problema, para "designar una situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla porque no dispone de un algoritmo para ello y debe, por tanto, buscar estrategias, investigar, razonar, establecer relaciones e implicar sus afectos para hacer frente a la situación" (p. 24). En este documento, en cambio, se asume como problema, *la comprensión y la justificación de los procesos mediante los cuales se llega a la solución de cuestiones planteadas en términos de igualdades y sentencias numéricas que incluyan únicamente operaciones de adición y/o sustracción*.

Las sentencias numéricas que aquí se analizan, son expresiones de la forma $a+b=c$, $a+b=c+d$, $a-b=c$, $a-b=c-d$, en las cuales se conocen todos los valores de *a, b, c y d*; y las igualdades numéricas son expresiones de la forma $a+b=c$, $a+b=c+d$, $a-b=c$, $a-b=c-d$, en las cuales se desconoce sólo uno de sus valores. No interesa la respuesta en sí, sino el razonamiento que se realiza y las relaciones que se reconocen, en la perspectiva de su resolución, sin que se tenga que recurrir a los algoritmos usuales de adición y sustracción.

**5. Articulación entre Pensamiento Variacional y Pensamiento Relacional**

Cuando se examina un objeto o situación haciendo uso del *pensamiento relacional*, el propósito es, desde luego, encontrar relaciones entre sus elementos, de modo que la atención puede variar de la totalidad de la situación matemática a ciertas partes o detalles de la misma y viceversa; además, puede implicar hacer énfasis en unos de sus elementos o aspectos y aún ignorar otros (Molina, 2006). En lo que respecta al *pensamiento variacional*, lo que se busca es determinar las relaciones de covariación existentes en dichas situaciones; es decir, se trata de analizar qué, cómo y cuánto cambia una situación por la variación de sus elementos. Así pues, mientras que el pensamiento relacional busca todo tipo de relaciones, el variacio-

[3] Si bien algo es dinámico cuando su estado cambia con el tiempo, en un sentido metafórico, se puede considerar algo como dinámico, cuando se puede percibir en él una sensación de movimiento.

nal, se enfoca en las relaciones de covariación y en la variación de las variables en sí mismas.

Por ejemplo, sabiendo que es verdadera la igualdad *1788-1783=5*, determinar el valor de verdad de la igualdad *1789-1784=5*.

Usualmente, el problema se resuelve de la siguiente manera: se realiza la operación indicada en el lado izquierdo y el resultado se lo compara con el valor del lado derecho de la igualdad. Sin embargo, desde el punto de vista del PV, se observa que en las dos expresiones hay regularidad en cuanto a las operaciones y los resultados de las mismas, de modo que ahora, lo que se debe hacer es analizar los términos para determinar si hay cambios con el fin de proceder a cuantificarlos. En este sentido, se encuentra que el valor 1789 - nuevo minuendo - aumentó en una unidad respecto a 1788 - minuendo inicial -, pero también aumentó en una unidad el valor 1784 - nuevo sustraendo - con respecto al valor 1783 - sustraendo inicial -, así que, tanto el nuevo minuendo como el nuevo sustraendo cambiaron en la misma cantidad, entonces, el resultado de la sustracción planteada es el mismo que el de la sustracción inicial, puesto que se sustrajo lo que se aumentó. Por tanto, es verdadera la igualdad *1788-1783=5.*

## 6. Problemas de Aplicación

Utilizando una parte del análisis que Molina (2006) realizó sobre igualdades y sentencias numéricas, se presenta la estrategia aplicable para obtener la solución de cuestiones planteadas, en términos de sentencias e igualdades numéricas, desde la perspectiva del PV.

*Problema 1.* Resolver la igualdad numérica *8+4= □+5*

En este caso, se observa que la expresión aritmética tiene la estructura *a+b=c+d*, en la cual se conocen los valores de *a*, *b*, *d* y se debe calcular el valor de *c*.

En Molina (2006, p. 67) se encuentra el siguiente razonamiento:

> (…) se pueden comparar las expresiones que la componen, "8 + 4" y " □ + 5", y reconocer que ambas contienen una suma y que una contiene un 4 y otra un 5. Usando conocimiento de la propiedad de compensación y usando sentido numérico, mediante el cual se sabrá que 4 es una unidad menor que 5, puede deducirse que la respuesta es una unidad menos que 8, por tanto, 7.

Decir que se requiere sentido numérico para cuantificar la diferencia entre los elementos de cada miembro de la igualdad, equivale a decir que es necesario aplicar pensamiento variacional para determinar el incremento o la disminución con el fin de obtener la respuesta. Ahora bien, a pesar de que en Molina (2006) está conceptualizado lo que se entiende por *sentido numérico*, no aparece lo referido a *patrones y regularidades*; sin embargo, la autora lo utiliza para sugerir que se los busque entre los valores de *a*, *b*, *c* y *d* con el fin de obtener la respuesta sin tener que recurrir al cálculo usual. Pero en este caso, hablar de patrones y regularidades, implica determinar los cambios de los valores de cada una de las parejas *(a,c)* y *(b,d),* además de considerar la regularidad del operador de adición en los dos términos. Así pues, los cambios que se buscan se pueden manifestar en términos de incrementos y/o disminuciones.

Concretamente, utilizando la propiedad de compensación (relación de compensación), la regularidad del operador de adición y el PV, se puede razonar así: como la diferencia entre *b* y *d* es de una unidad de incremento para *d*, entonces, en la otra pareja la diferencia también debe ser de una unidad de disminución para *c;* de manera que si *a* tiene el valor de 8, entonces *c* debe tener el valor de *7.*

Obsérvese cómo la estrategia de inducir el razonamiento a partir de los cambios presentados en los términos de la estructura *a+b=c+d*, facilita la búsqueda de la solución, porque en lugar de realizar los cálculos mediante el algoritmo usual de adición, se procede a cuantificar los cambios en los términos y, con ello se logra la deducción de la respuesta, sin tener que recurrir a la estrategia usual para resolver este tipo de problemas.

*Problema 2.* Determinar el valor de verdad de la expresión: *11 + 5 > 13 + 5*

Para utilizar una estrategia análoga a la del problema anterior, obsérvese que la expresión propuesta tiene la forma *a+b>c+d*

En los dos términos aparece el operador de adición, de modo que la veracidad depende de la cuantificación de los cambios de los componentes de los pares ordenados *(a,c)* y *(b,d)*. Dado que *b=d*, y que *c* es dos unidades mayor que *a*, se concluye, resueltamente, que la expresión es falsa.

*Problema 3.* Resolver la igualdad *12 - 4= 13 - □*

En este tipo de problemas, la estrategia consiste en observar la estructura de la expresión y, luego, haciendo uso de pensamiento variacional, comparar los términos (como si fueran variables) con el fin de determinar si hay cambios, para proceder luego cuantificarlos.

En este caso, el problema tiene la estructura *a-b=c-d,* en donde se conocen los valores de *a*, *b*, *c* y se debe calcular el valor de *d*. En el par *(a, c)*, se observa que *a<c*, en una unidad, entonces para que se cumpla la igualdad, se debe tener que en el par *(b,d)* también se cumpla que *b* sea menor que *d*, en una unidad; es decir, se debe cumplir que *d=5.*

*Problema 4.* Sabiendo que *135-120=15*, determinar el valor desconocido en la igualdad *135-119=*□

Se observa que, respectivamente, la estructura del problema tiene la forma de: *a-b=c* y *d-e=f*

Al comparar los términos en forma correspondiente, se observa que *a=d* y que *b>e* en una unidad; es decir, el sustraendo de la segunda expresión aritmética es menor que el sustraendo de la primera; por lo tanto, *c* que es el resultado de la diferencia en la primera, debe ser menor que *f* que es el resultado en la diferencia de la segunda expresión. Como la diferencia entre *b* y *e* es de una unidad, la diferencia entre *c* y *f*, también debe ser de una unidad, concluyendo que *f=c+1*; es decir, *f=16*.

Como se constata en la resolución de estos cuatro tipos de problema, el PV permite realizar un trabajo de razonamiento dinámico en lugar de recurrir a las estrategias usuales.

## CONCLUSIONES

- La revisión de tema sobre el PV permite comprenderlo como un proceso cognitivo, dirigido al análisis de la covariación de un sistema, de una situación, en general, de un fenómeno; es decir, concebirlo como un proceso mental dirigido a reconocer qué, cómo y cuánto varía dichos sistema, situación o fenómeno con el fin de lograr su comprensión y realizar una descripción, modelación o representación en la perspectiva de la resolución de problemas o de toma de decisiones. Su aplicación se pone en evidencia en la utilización o comunicación de argumentos y estrategias de tipo variacional; en otras palabras, en el uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema, situación o fenómeno que se esté estudiando.

- Se encuentra que es posible promover acciones de pensamiento que contribuyan al uso y desarrollo del PV a través de las actividades cotidianas de enseñanza y de aprendizaje, cuando se trabaja de forma *dinámica*, donde prevalezca la producción de razonamientos para establecer relaciones, más que la obtención de resultados. Por ejemplo, desde los primeros grados de escolaridad, se puede promover a través del reconocimiento de patrones y regularidades en los términos de expresiones aritméticas, que constituyen sentencias e igualdades, de modo que se pueda obtener la respuesta sin que se tenga que recurrir a los algoritmos usuales de adición y sustracción.

- Las preguntas qué, cómo y cuánto se pueden tomar como un recurso didáctico cuando se trata de realizar un análisis dinámico de un sistema, situación o fenómeno en la perspectiva de reconocer relaciones, principalmente, las de dependencia.

- Finalmente, la resolución de problemas y la búsqueda de relaciones entre los elementos que constituyen las expresiones aritméticas de la forma: *a+b=c+d; a+b>c+d; a+b<c+d; a-b=c-d; a-b>c-d; a-b<c-d*, se hace posible a través de la observación de cambios entre sus términos y, la cuantificación de los mismos; es decir, mediante la aplicación del PV antes y/o durante el proceso de resolución de dichas sentencias e igualdades.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Acosta, E. (2004). Variable y variación. En *Matemática educativa: fundamentos de la matemática universitaria II*. Bogotá, Colombia: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, pp.111-125

Callejo, M. L. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, España: Narcea, S.A. Ediciones.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanis, J. A., Rodríguez, R. A. & Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R., Molina, G. & Sánchez, M. (2005b). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 18(1), 463 – 468. México: Clame AC.

Cordero, F., Muñoz, G, Ruiz, B. & Suárez, L. (2005). Un modelo para el desarrollo del pensamiento matemático. En R. Cantoral, R. M. Farfán, F. Cordero, J. A. Alanis, R. A.

Rodríguez & A. Garza. (Eds.), *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas, pp. 55-88